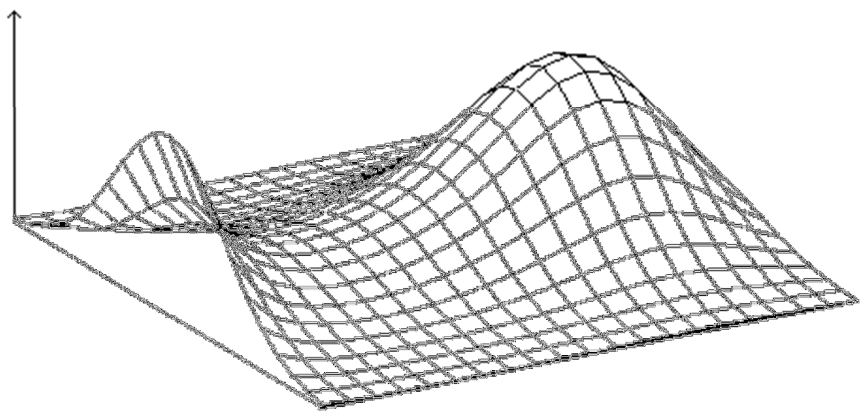
מבוא מתמטי לפיזיקאים

II



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במבוא מתמטי לפיזיקאים והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GOOL
בשביל התירגול

תוכן עניינים

פרק 1 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

*** מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.**

(1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$. מהי משמעות התוצאה ?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3,4)$.

(2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,\pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x.

(5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

(6) תהי $f(x,y)=x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2,1,4)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון הנקודה $(2,6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$ ואתה נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר , באיזה כיוון עליך ללכת?

<u>הערות סימון</u>

א. במישור R^2 : $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים : $\vec{u}=(x,y)$ או $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$

במרחב R^3 : $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים : $\vec{v}=(x,y,z)$ או $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$

ב. יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם כך $\underline{u}$ או כך $\mathbf{u}$.

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

<u>פתרונות</u>

(1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. אורך הגרדיאנט 10 .

(2) 48/5 (3) ½ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) 88/3

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל- 22 .

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2) .

פרק 2 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

*** מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.**

אינטגרל קוי מסוג I

(1) חשב $\int_C f(x,y)ds$

א. $f(x,y)=1-x^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

ב. $f(x,y)=x$; $C: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$.

ג. $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

ד. $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של ΔOAB : $O(0,0),A(0,1),B(1,0)$.

(2) חשב $\int_C f(x,y,z)ds$

א. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$

ב. $f(x,y,z)=x^3+3z$; $C: x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$

(3) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $(0\le t\le \pi)$ $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t$.

חשב את **מסת** הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

אינטגרל קווי מסוג II

(5) חשב:

א. $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le \pi/2$

ב. $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$; $C: x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1$

(6) חשב $\int_C ydx+x^2dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y=2x$ ב. $y=x^2$.

(7) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$ אם העקום נתון על ידי :

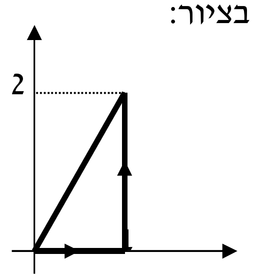
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

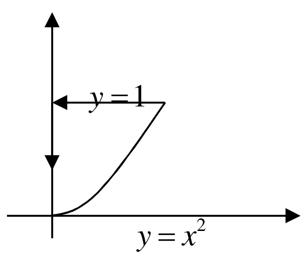
ג. הקוים הישרים מ- (1,1) ל- (1,2) ומשם ל- (4,2).

ד. העקום : $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

(8) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(9) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור :



(10) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$

חשב את האינטגרל הקווי $\int\limits_C F\cdot dr$ מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,1)$ לאורך המסלולים :

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

א. $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

ב. $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

(12) א. חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ-$(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ-$(1,1)$ עד $(-2,4)$.

(13) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

<u>הערת סימון</u>

אינטגרל קוי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C\left(f,g,h\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C\left(A_1,A_2,A_3\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

פתרונות

(1) א. π ב. $\frac{16}{3}$ ג. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ד. $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(2) א. $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$ ב. $\frac{567}{2}$

(3) 6

(4) $\sqrt{5}k\pi^2$

(5) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{4}{3}$

(6) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

(7) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

(8) $\frac{1}{2}$

(9) $\frac{4}{5}$

(10) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

(11) א. $-\frac{59}{105}$ ב. $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

(12) א. 3 ב. -3

(13) 1

פרק 3 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

א. $\mathbf{F}(x,y)=\left(6x+5y,5x+4y\right)$

ב. $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

ד. $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+3z^2)\mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+(1+3x^2y^2)dy$.

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$ מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב : א. $\oint\limits_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint\limits_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint\limits_{L_3}\mathbf{F}dr$.

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$.

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2,0)$ ל- $(-2,0)$:

$L_1: x^2+y^2=4\ ,\ y\ge 0$ $\qquad$ $L_2:\ x^2+y^2=4\ ,\ y\le 0$

א. חשב : $\oint\limits_{L_1}\mathbf{F}dr$, $\oint\limits_{L_2}\mathbf{F}dr$.

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge 0\right\}$.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$$
$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

פתרונות

(1) א. $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$.   ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$.   ד. $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

ה. $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$.   ו. השדה אינו משמר.

(2) ב. 236

(3) ‎-58

(4) 5

(5) ‎-2

(6) 15 = עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1,-1,1) ל- (2,1,-1) לאורך C .

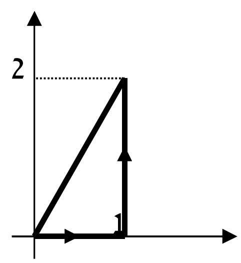
(7) א. 2π ב. -2π ג. 0 .

(8) א. $L_1:\pi$, $L_2:-\pi$

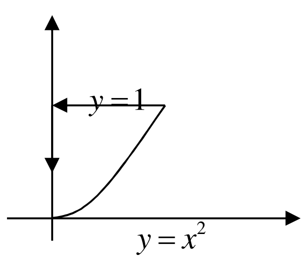
פרק 4 - משפט גרין

בכל אחד מהתרגילים (3)-(1) אשר את משפט גרין, כלומר חשב
את האינטגרל $\oint_C fdx + gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R \left(g_x - f_y\right)dA$ והראה
שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2 ydx + xdy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x-y^2)dx + dy$; המסלול C מתואר בציור:



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$;

C הוא ריבוע שקודקודיו: $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.ריקי

(4) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x - y^3\right)\mathbf{i} + \left(\cos y + x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan\frac{x}{2}\right)dx + \left(xe^y + y\cos y^2\right)dy$ כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y\,dx + \left(e^{2x-y}\left(\sin y + \cos y\right) + 2xy\right)dy$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2 + 4y^2 = 4,\ y \ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה

.$(-2,0)$

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>פתרונות</u>

(1) הערך המשותף הוא 0.5

(2) הערך המשותף הוא 0.8

(3) הערך המשותף הוא 8

(4) 1.5π

(5) $0.5\sin 64$

(6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$

(7) ב. πab

פרק 5 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי.

(1) $\iint_S x^2 yzdS$ כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$ מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

(2) $\iint_S xdS$ כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

(3) $\iint_S yzdS$ כאשר S הוא המישור $z=y+3$ שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

(4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$ כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

(5) $\iint_S xyzdS$ כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$

המקיים $0\le v\le \pi/2$, $1\le u\le 2$.

(6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R .

(7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ שמתחת למישור $z=1$

וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$ קבועה. חשב את **מסת** היריעה.

אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$

ובניסוח אחר:

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(8) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת ע״י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(9) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

(10) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת ע״י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(11) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\geq 0$.

(12) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

<u>פתרונות</u>

(1) $171\sqrt{14}$ (2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$ (3) $\pi\sqrt{2}/4$

(4) 16π (5) $93/\sqrt{10}$ (6) $4\pi R^2$

(7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ (8) $\frac{11}{6}$ (9) $\frac{8\pi}{3}$

(10) 27 (11) 12π (12) -16π

פרק 6 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב
את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$ והראה שהם
שווים זה לזה. ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י
המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2+y^2+z^2=1$.

(3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י
המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

(6) חשב את $\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)xydzdx+(2xy+y^2z)dxdy$
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים) .

חשב את ה**שטף** דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

(8) חשב את $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k} \ ;$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\ge 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים
$$\iiint\limits_G div\mathbf{F}dV=\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ :

$$\iiint\limits_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint\limits_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$
$$\iiint\limits_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint\limits_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$

(3) הערך המשותף הוא 27

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π

פרק 7 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר
חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ והראה
שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\geq 0$.

(2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה
החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$ כאשר C העקומה בצורת
מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$
ו- C היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ וכיוונה
הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S \left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$
ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$
ומעל למישור- xy .

(7) חשב את $\iint_S \left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$
ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ מעל למישור- xy .

<u>הערת סימון</u>

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}dS$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}dS$$

$$\oint_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \Big((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\Big)\cdot \mathbf{n}dS$$

<u>פתרונות</u>

(1) הערך המשותף הוא 12π

(2) הערך המשותף הוא -16π

(3) הערך המשותף הוא א) 6- ב) 9- ג) 18-

(4) 90-

(5) 1-

(6) 0

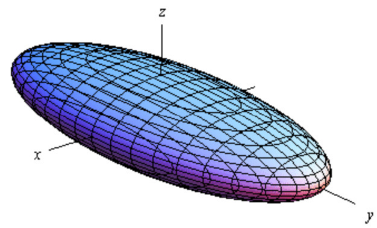
(7) 12π

נספח - משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$ נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

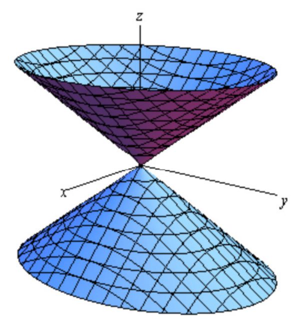


חרוט אליפטי

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

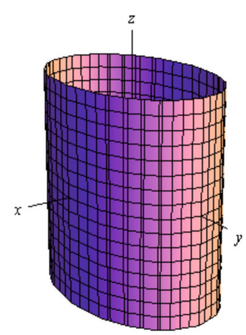


גליל אליפטי

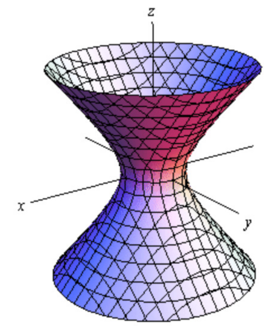
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו . במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.



<u>היפרבולואיד חד-יריעתי</u>

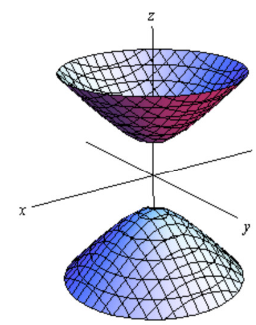


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

<u>היפרבולואיד דו-יריעתי</u>

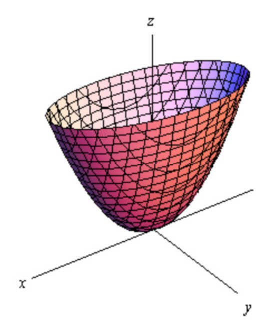


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

<u>פרבולואיד אליפטי</u>



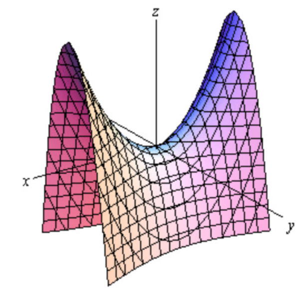
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

<u>פרבולואיד היפרבולי</u>



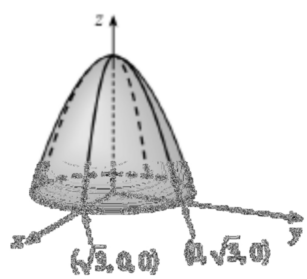
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה-y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה-x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

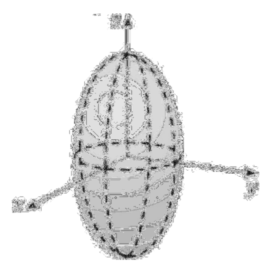
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

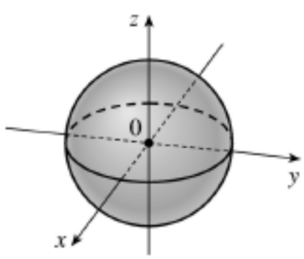
<u>דוגמאות שונות</u>



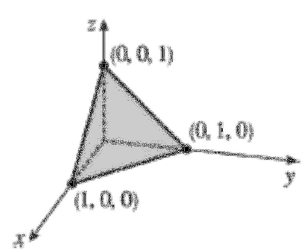
$z=3-x^2-y^2$



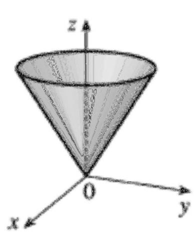
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



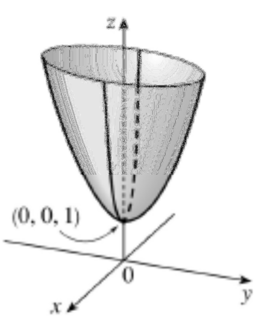
$x^2+y^2+z^2=1$



$x+y+z=1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$z=4x^2+y^2+1$

נספח נוסחאות

הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0,y_0) לנק' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0,y_0,z_0) לנק' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

נוסחאות - גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב (וקטורים)

במישור

מרחק בין 2 נקודות במישור (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) : $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

שיפוע ישר העובר דרך 2 נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) : $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ישר דרך (x_1,y_1) **ששיפועו** m : $y-y_1=m(x-x_1)$

ישר דרך (x_1,y_1) **ו-** (x_2,y_2) : $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

תנאי ש**הישר** $y=m_1x+n_1$ יהיה **מאונך** לישר $y=m_2x+n_2$: $m_1\cdot m_2=-1$

תנאי ש**הישר** $y=m_1x+n_1$ יהיה **מקביל** לישר $y=m_2x+n_2$: $m_1=m_2$

מרחק הנקודה (x_0,y_0) **מהישר** $ax+by+c=0$: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

הזוית החדה α בין הישר $y=m_1x+n_1$ לישר $y=m_2x+n_2$: $\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוסו R : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

משוואת אליפסה קנונית : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר a ו- b חוצי הצירים של האליפסה.

משוואת היפרבולה קנונית : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר a הוא חצי הציר הממשי.

משוואת פרבולה קנונית : $y^2=2px$

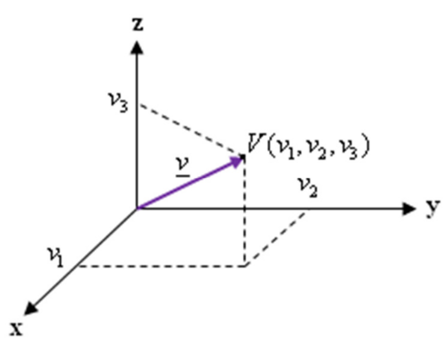
במרחב (וקטורים)

מרחק בין 2 נקודות (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) : $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ההצגה האלגברית של וקטור

על כל נקודה $V(v_1,v_2,v_3)$ במרחב התלת-ממדי ניתן להסתכל כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים $O(0,0,0)$ וסופו בנקודה V. חץ זה נקרא וקטור ומסומן $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$.

* מקובל לרשום $\vec{v}$ או $\mathbf{v}$ במקום $\underline{v}$.



ההצגה האלגברית של וקטור בעזרת וקטורי הצירים

וקטורי הצירים הם הוקטורים: $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$

המסומנים גם כך $\hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$, $\hat{k}=(0,0,1)$

או כך $\hat{x}=(1,0,0)$, $\hat{y}=(0,1,0)$, $\hat{z}=(0,0,1)$

או כך $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

ההצגה של וקטור $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ בעזרת וקטורי הצירים היא $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$

<u>פעולות בין וקטורים:</u>

נתונים שני וקטורים: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

כפל וקטור בסקלר: $k\cdot\vec{a}=k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$

חיבור וקטורים: $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)$

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\quad\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\right)$.

מכפלה וקטורית של וקטורים: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\left(a_2b_3-a_3b_2\right),-\left(a_1b_3-a_3b_1\right),\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\right)$

גודל וקטור $\vec{a}$ (אורך הוקטור): $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

הנירמול של וקטור $\vec{a}$: $\hat{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(a_1,a_2,a_3)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

<u>כיוון וקטור במרחב</u>

יהיו α,β,γ שלוש הזויות שיוצר הוקטור $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ עם הצירים x,y,z בהתאמה.

1. $a_1=|\vec{a}|\cos\alpha, a_2=|\vec{a}|\cos\beta, a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$
2. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
3. הוקטור $\hat{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ הוא וקטור יחידה בכיוון $\vec{a}$.

משוואת ישר פרמטרי במישור דרך $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$:

$\underline{x}=\underline{a}+t\cdot\underline{u}\quad\left(\underline{a}=A,\ \underline{u}=B-A\right)$

or

$(x,y)=(x_1,y_1)+t\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$

or

$x=x_1+t(x_2-x_1)$, $y=y_1+t(y_2-y_1)$

משוואת ישר פרמטרי במרחב דרך $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad \left(\underline{a} = A\,,\ \underline{u} = B - A\right)$$

or

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)\ ,\ y = y_1 + t(y_2 - y_1)\ ,\ z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

<u>זווית בין שני ישרים</u>

נתונים שני ישרים : $L_1 :\ \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ ו- $L_2 :\ \underline{x} = \underline{b} + s\underline{v}$

הזווית α בין הישרים מקיימת: $\cos\alpha = \dfrac{|\,\underline{u} \cdot \underline{v}\,|}{|\,\underline{u}\,||\,\underline{v}\,|}$

משוואת מישור : $ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\vec{v} = (a,b,c)$ וקטור נורמל (מאונך) למישור.

משוואת מישור דרך 3 נקודות: $(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3, z_3)$ **:**

$$\det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

<u>מרחק נקודה ממישור</u>

מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$: $\dfrac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

<u>זווית בין ישר ומישור</u>

נתונים: ישר $L :\ \underline{x} = \underline{r} + t\underline{u}$ ומישור $ax + by + cz + d = 0$.

הזווית α **בין הישר למישור מקיימת:** $\sin\alpha = \dfrac{|\,\underline{u} \cdot \underline{v}\,|}{|\,\underline{u}\,||\,\underline{v}\,|}$ **באשר** $\underline{v} = (a,b,c)$**.**

הערה:

הישר $\underline{x} = t(a,b,c)$ מאונך למישור $ax + by + cz + d = 0$.

לפיכך, אם הישר $L :\ \underline{x} = \underline{r} + t \cdot \underline{u}$ מקביל למישור אז $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

זווית בין שני מישורים

נתונים שני מישורים : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$

הזווית α שבין המישורים מקיימת : $\cos\alpha = \dfrac{|\,a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\,|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

פרק 8 - וקטורים

הערה: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\mathbf{u}, \vec{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x, y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$ ז. $\underline{u}/|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u},\underline{v})$ ט. $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$ י. $proj(\underline{u},\underline{v})$

* בסעיפים ז,ח,י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x=(1,2,3)+t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x=1+2t,\ y=10,\ z=4-t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D=(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x, ציר ה- y וציר ה- z.

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4,5,6)$ ומקביל לציר z.

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר <u>העובר דרך הנקודה</u> $(1,2,3)$ <u>והמאונך</u> לישר $\underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

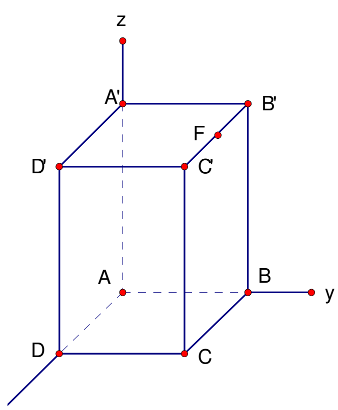
(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר ℓ_2 <u>העובר דרך הנקודה</u> $P(-4,1,1)$, <u>מאונך</u> לישר $\ell_1:\ (2,-3,1)+t(1,4,-3)$ <u>וחותך</u> אותו.

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,0,1)+s(-4,1,5)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

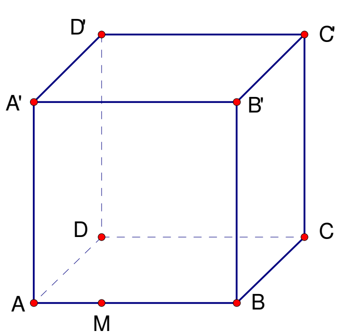
ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x=1+2t-s,\ y=10+t,\ z=4-t+s$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ״ל.
ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

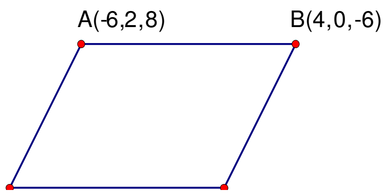
(11) נתונות הנקודות: $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר , המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .
ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.



(12) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כמתואר בציור.
נתון:
$|\overrightarrow{AA'}|=6$, $|\overrightarrow{AD}|=2$, $|\overrightarrow{AB}|=4$, $C'F=FB'$.
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר העובר דרך $A'DB$.
ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר העובר דרך $A'DB$.



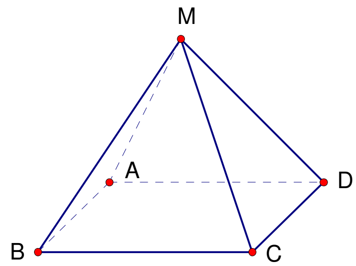
(13) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתונים הקודקודים:
$A(7,-9,5),\ B(1,-3,-7),\ C(-5,-1,-3),\ C'(-1,7,-1)$.
הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$.
א. חשב: $|\overrightarrow{MA'}|,|\overrightarrow{MC}|$.
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A'MC$.



(14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.



(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

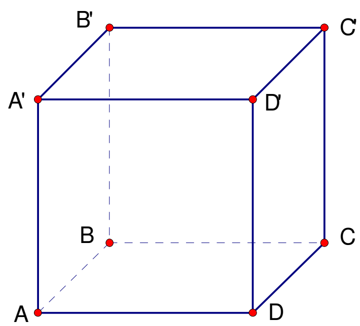
וקודקודה M (ראה ציור). נתון:

$A(3,6,-1),\ B(-1,2,-3),\ C(7,6,-3),\ M(4,-3,-4.5)$.

א. מצא את גודל זווית $\sphericalangle ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

ג. מצא את נפח הפירמידה.



(16) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

נתון: $A(1,2,0),\ C(4,0,1),\ D(2,2,-1),\ B'(9,12,8)$

חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם:

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0),\ \underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$.

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(12,-3,1),\ \underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$.

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2),\ \underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$.

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1),\ \underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$.

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את <u>נקודות החיתוך</u> ואת <u>הזווית</u> בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את <u>המרחק</u> ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1:(x,y,z)=(4,3,1)+t(1,-3,2)$$
$$\ell_2:(x,y,z)=(5,-1,4)+m(-1,3,5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את ℓ_2 ומקביל ל- ℓ_1.

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1:(x,y,z)=(3,1,1)+u(2,-1,-2)$$
$$\ell_2:(x,y,z)=(3,9,-6)+m(6,2,-1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.
אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות: $P(k,0,0)$, $Q(0,4,0)$, $R(0,k,3)$, $S(1,1,-1)$.

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,
ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 היא: $\ell_2:\ (2,k+1,3)+t(k^2-9,-7,0)$.

א. 1. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

2. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π, המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לציר ה- z.

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1., מצא את המרחק של ℓ_2 מהמישור π.

(22) נתונות ארבע נקודות: $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר ℓ_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B.

הישר ℓ_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D.

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א., מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1
ומקביל לישר ℓ_2.

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:
חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$

ונתון מישור $\pi: x-4y-kz-5=0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א , חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overrightarrow{BC}$.

(25) נתונים ישר: $\ell: (2,1,-1)+t(0,a,-1)$ ומישור: $\pi: x-2y-4z=4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר ℓ ומאונך למישור π .

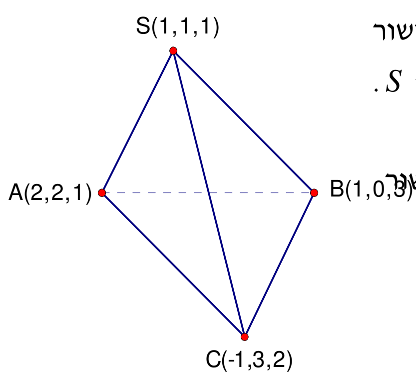
(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$\ell_1: (x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-1,-1)$$
$$\ell_2: (x,y,z)=(3,-1,2)+s(-2,1,1)$$
$$\pi:\ x-y+2z=3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר ℓ_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בציור משמאל נתון טטראדר $SABC$.



א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S , ניצב למישור הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S.

ב. מצא את משוואת המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע AC לבין מישור המשולש ΔSAB.

(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם:
מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $2x+3y-4z=10$, $x+2y-z=7$.

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ_1 של שני המישורים.

ב. נתון: $\ell_2:(6,2,-2)+s(2,-1,1)$. מהו המצב ההדדי בין ℓ_1 ו- ℓ_2 .

(30) נתונים שני מישורים: $2x+y-3z+1=0$, $x-y+2z-7=0$.

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C , יקביל הישר ℓ למישור $\pi:4x-y+Cz-1=0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר ℓ מהמישור π .

(31) נתונים שני מישורים: $x-3y+4z=-10$, $x+y+2z=6$ ונקודה $M(1,8,-3)$.

הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.

א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר ℓ .

ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר ℓ .

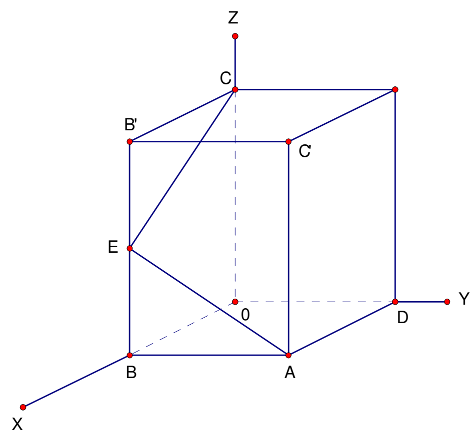
(32) הישר $\ell:(0,-2,1)+t(-3,4,m)$ מקביל למישור $\pi_1:x-2y-4z=4$.

א. מצא את הקבוע m .

ב. הנקודה $N(2,-1,4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר ℓ מישור π_2 .

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2 .

לפתרון מלא בסרטון
כתב



(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא בראשית הצירים.

E אמצע BB' , $|AB|=1$.

א. חשב את זווית $\sphericalangle CEA$.

ב. חשב את הזווית בין שני המישורים AEC ו- $BODA$.

(34) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1 : (1,2,3)+t(3,-12,18)$$
$$\ell_2 : (2,5,-1)+u(-4,16,-24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב- א., ועובר דרך הנקודה $(0,-1,0)$.

פתרונות

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

(1) $x=5, y=-2, z=6$.

(2) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$ ד. $(2.5,-1,-3.5)$

ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$ ז. $\frac{1}{\sqrt{26}}(-3,1,4)$ ח. 12.5698

ט. 14 י. $(\frac{-19}{7},\frac{19}{14},\frac{57}{14})$

(3) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

(4) א. $x=1+4t, y=2+5t, z=3+6t$ ב. $\underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

(5) א.1) $(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א.2) $(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$

א.3) $(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D

ג. 35.477°

(6) א. $t(1,0,0)$, $t(0,1,0)$, $t(0,0,1)$ ב. $(4,5,6)+t(0,0,1)$

(7) $(1,2,3)+t(2,1,0)$

(8) $(-4,1,1)+t(83,-32,-15)$

(9) א. $x=1+2t-4s, y=-2+s, z=3+t+5s$ ב. $(1,10,4)+t(2,1,-1)+s(-1,0,1)$

(10) א.1. $(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ א.2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא

(11) א. $(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. 1.4142 ג. $y-z+2=0$

(12) א. $(1,4,6)+t(6,3,2)$ ב. $\frac{18}{7}$

(13) א. $|\overline{MC}|=\sqrt{152},\ |\overline{MA'}|=\sqrt{108}$ ב. 59.396

(14) א. $D(-20,8,12)$ ב. 81.62°

(15) א. 26.565° ב. $S=24$ ג. $V=32$

(16) $V=72$

(17) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. זווית בין הישרים 47.6°.

(18) ב. $3x+y=14$ ג. 0.31622

(19) א. מצטלבים ב. 10

(20) ב. $d=\frac{2}{15},\ k=0.8$

(21) א.1. $k=-4$ א.2. $k=4$ ב. $x+y=7$ ג. 5.65685

(22) א. $k=2$ ב. $8x-4y+5z+1=0$

(23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנק' (3.5,-0.5,-2), זוית בין הישר למישור 40.78°

(24) א. $k=9$ ב. 14.67°

(25) א. $a=2$ ב. $10x+y+2z-19=0$

(26) א. ℓ_1 מוכל, ℓ_2 חותך. ב. $(-1,1,4),(\frac{11}{3},\frac{-4}{3},\frac{5}{3})$

(27) א. $SC\perp SAB$ ב. $2x-2y-z+1=0$ ג. 64.76°

(28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך: $(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$. זווית 63.612°.
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם: 0.324 ג. המישורים מתלכדים.

(29) א. $(9,0,2)+t(-5,2,-1)$ ב. מצטלבים

(30) א. $(2,-5,0)+t(1,7,3)$ ב. $C=1$ ג. 2.8284

(31) א. $5x-y-2z=3$ ב. 5.07

(32) א. $m=-8$ ב. $(2,-1,4)+t(-4,4,-8)$

(33) א. 78.463° ב. 35.26°

(34) א. $2x-10y-7z+39=0$ ב. $2x-10y-7z-10=0$

נספח נוסחאות

גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^\infty=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=\arctan x$	$\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0)=0$	$\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^\infty=\infty$ $a^\infty=0$
$y=\sin x$	$---$	$\sin 0=0$	$---$
$y=\cos x$	$---$	$\cos 0=1$	$---$
$y=\frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y=\frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty\ ,\quad \infty(-\infty)=-\infty\ ,\quad \infty+\infty=\infty\ ,\quad \infty\pm a=\infty\ ,\quad \infty\cdot(\pm a)=\pm\infty\ ,\quad \infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \quad \rightarrow \quad y' = 0$
2. $y = f^n \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \quad \rightarrow \quad y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \quad \rightarrow \quad y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \quad \rightarrow \quad y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \quad \rightarrow \quad y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \quad \rightarrow \quad y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \quad \rightarrow \quad y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax\_b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\ \cos x=\cos\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\ \tan x=\tan\alpha\Rightarrow\ x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha\Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow\ x=\pi k\\ \cos x=0\Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\\a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^m a^n=a^{m+n}\\\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\\\left(a^m\right)^n=a^{mn}\\(ab)^n=a^n b^n\\\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\\a^0=1\\a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\\\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\\a^x=b\ \Rightarrow\ x=\ln b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0,b>0\\\ln a+\ln b=\ln ab\\\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}\\\ln 1=0\ ,\ \ln e=1\\\ln e^n=n\\\ln x^n=n\ln x\ (x>0)\\e^{\ln x}=x\\a^b=e^{b\ln a}\\\ln x=k\ \Rightarrow\ x=e^k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c\\\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & if\ \ a\ge 0\\-a & if\ \ a<0\end{cases}\\|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\\\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\\|x|<a\ \Leftrightarrow\ -a<x<a\\|x|>a\ \Leftrightarrow\ x<-a\ or\ x>a\end{cases}$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות	טור מקלורן
$-\infty < x < \infty$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$-1 < x \le 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$-1 \le x \le 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$
$-1 \le x \le 1\ (m > 0)$ $-1 < x \le 1\ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1\ (m \le -1)$ $m \ne 0, 1, 2, 3, \ldots$	$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots$

פרק 9 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

1) $\begin{cases} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{cases}$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3+R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2+R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3-3R_2$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2+3R_3$

$R_1 \to 5R_1-8R_2$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(2 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

(6 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(8 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(*9 $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

(1 $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

(2 $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=14 \end{aligned}$

(3 $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

(4 $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

(5 $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

(6 $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

(7 $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

(8 $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

(9 $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

(10 $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

(11 $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

(12 $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות

1)
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל **השדה** $\mathbf{F}$.

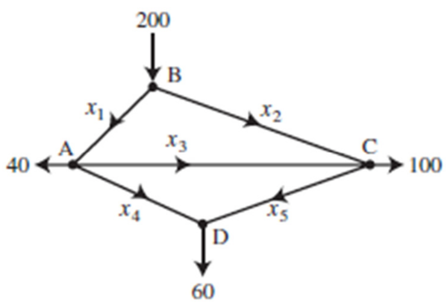
1)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+4x_2+4x_3&=2\\ 3x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbb{Z}_5}$$

2)
$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbb{C}\ ,\ \mathbf{F}=\mathbb{R}}$$

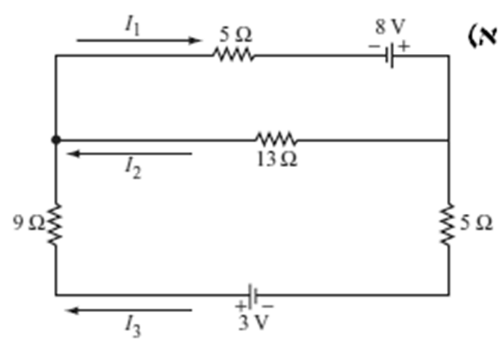
(12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$

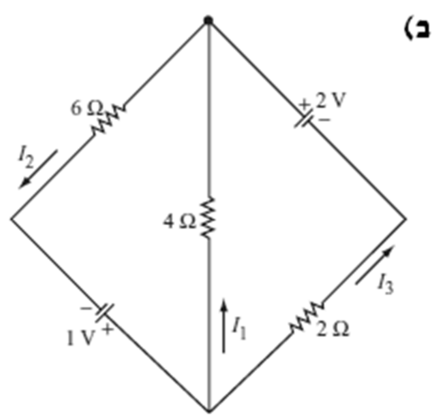
א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.
ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.
ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
ח. מצא לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4=0$.



(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):





*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות ליניאריות.**

<u>**תשובות:**</u>

(1) 1) ו- 3) שקולות ו- 2) ו- 4) שקולות.

(2) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1) $R_1 \to 2R_1 + R_2$ 2) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ 2) $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

(5) ב.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(6)

1) $(x,y)=(1,2)$ 2) $(x,y)=(5-2t,t)$

3) ϕ 4) ϕ

5) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$ 6) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

7) $(x,y)=(-1,1)$ 8) ϕ

9) $(x,y)=(\frac{1+2t}{3},t)$ 10) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

11) ϕ 12) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(7) 1) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=1$ ג. $k=-2$ 2) א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=-2$ ג. $k=1$

3) א. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ ב. $k=\frac{4}{7}$ ג. $k=-1$ 4) א. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ ב. $k=1,\ k=-0.4$

5) א. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ ב. $k=\pm 1, k=-2$.

6) א. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ ג. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$.

(8) 1) א. $k=-1$ ב. $k\neq \pm 1$ ג. $k=1$ 2) ב. $k=3$ ג. $k\neq 3$ 3) א. $k\neq 1$ ב. $k=1$

(9)

1) א. $a\neq 2$ ב. $a=2,\ b\neq -3$ ג. $a=2, b=-3$.

2) ב. $b \neq 2.5$ או $a \neq -6$ ג. $a=-6, b=2.5$.

3) ב. $a=2, b \neq 2$ ג. $a=2, b=2$ או $a \neq 2$.

(10) א. $ab+2c \neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

(11)

1) $(x_1,x_2,x_3)=(0,3,0)$ 2) $(z_1,z_2,z_3) \underset{F=\mathbb{C}}{=} ((-1+i)t+1+i,3,t)$, $(z_1,z_2,z_3) \underset{F=\mathbb{R}}{=} (2,3,-1)$

(12) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq -1$, $k \neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$

ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

(13) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$.

ג. 40 .

(14) א. $I_1=\frac{255}{317}, I_2=\frac{97}{317}, I_3=\frac{158}{317}$. ב. $I_1=-\frac{5}{22}, I_2=\frac{7}{22}, I_3=\frac{6}{11}$

פרק 10 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4\times6}$, $B_{4\times6}$, $C_{6\times2}$, $D_{4\times2}$, $E_{6\times4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$

6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x,y,z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$

6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -6 & 3\end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. A^2-B^2 סימטרית. 3. A^2+B סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}4 & 1.5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 8\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -3 & 4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

1)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x-2y+2z&=5 \\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ y+z+t&=1 \\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X:

1) $AXC=D$ 2) $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ 3) $P^{-1}X^TP=A$

4) $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ 5) $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$ 6) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

ב. נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X\left(2B\right)^{-1}=B+I$.

ג. נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

ד. נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB\left(I+2A\right)^{-2}=\left(7A\right)^{-2}$

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ג. נתונים: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I-A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

(1) 1) 4×6 2) 3) 4×2 4) 5)
6) 6×6 7) 6×2 8) 9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

5) 230 6) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

9) 63 10) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(4)

1) $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 1) $\begin{aligned} 4x-2y+4z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x-6y+3z&==3 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} -2y+4z&=1 \\ x-5y+z&=2 \\ x-6y-z&=3 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} (4+k)x-2y+4z&=1 \\ x+(k-1)y+z&=2 \\ x-6y+(3+k)z&=3 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x-6y+2z&=0 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ -2x-3y-6z&=6 \\ 4x+y+z&=9 \end{aligned}$

(6) א. 1,2,3 ב. 2 ג. 1,2,3

(7)

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) 1) $k \neq 1,\ k \neq -2$. 2) $k = 1,\ k = -4$

(9) 1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. 2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. $CD^2 - A$.

5. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C (B^{-1})^T BC^T$

ב. $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

פרק 11 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

(1 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$ (9 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(10 $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (11 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

(1 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

7)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

1) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

2) $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1, j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

3) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

4) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

7*) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3,b=1,c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

1) $|ABA^{-1}B^T|$ 2) $|4A^2B^3|$ 3) $|-A^{-2}B^TA^3|$ 4) $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) $$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

.1 $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ .2 $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

<u>תשובות:</u>

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29 . 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.

11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$, $D_2=a^2-bc$, $D_3=a^3-2abc$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13} . 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n . **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}-7 & 10 & 20 & -4\\ 2 & -3 & -6 & 1\\ -3 & 5 & 8 & -2\\ 1 & -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -20 & 4\\ -2 & 3 & 6 & -1\\ 3 & -5 & -8 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

פרק 12 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.
ב. מצא פולינום אופייני.
ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
ה. מצא וקטורים עצמיים.
ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.
ט. מצא את הפולינום המינימלי.
י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

(1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (5 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{F = C, F = R}$ (6 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{F = C, F = R}$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
1. $|A| = |B|$. 2. $tr(A) = tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP = B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

פרק 13 - פתרון משוואות לינאריות בעזרת טורים

פרק 13.1 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה רגולרית

1) נתונה מד"ר מהתבנית $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$
שעבורה הנקודה $x=0$ היא נקודה רגולרית.
הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה $x=0$.
בתשובתך התייחס גם למקרה בו הנקודה היא רגולרית כלשהי, $x=x_0$.
(הנח כי p,q פולינומים או מנה של פולינומים).

פתור את המשוואות הבאות (2-8) על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=0$. במיוחד, רשום נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי וציין את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.(הערת ניסוח: טור חזקות סביב $x=0$ שקול לטור טיילור סביב $x=0$ ושקול לטור מקלורן).

2) $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2 \quad ; \quad y(0)=3,\ y'(0)=12$

3) $y''-xy=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

4) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

5) $(x^2+4)y''+xy=x+2$

6) $y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0$

7) $y''+ty=e^{t+1}\ ;\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$

8) $y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0$ (השתמש בפתרון בסימן $\sum$).

9) פתור את המשוואה $y''+(x-1)y=e^x\ ;\ y(1)=1\ ,\ y'(1)=2$
על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

10) פתור את המשוואה $y''+xy'+(2x-1)y=0\ ;\ y(-1)=2,\ y'(-1)=-2$.

רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שכדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות:

(2) $a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \ (n \geq 5)$, $y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \ldots + a_n x^n \ldots$

(3) $a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \ (n \geq 3)$, $y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

(4) $a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2)$, $y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

(5) $a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} \quad (n \geq 4)$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24}\right)x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96}\right)x^4 + \ldots + a_n x^n$$

(6) $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n \geq 3)$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

(7) $a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

(8) $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n \geq 3)$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

(9) $a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \ldots + a_n(x-1)^n + \ldots$$

(10) $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)}a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)}a_{n-3} \quad (n \geq 3)$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \ldots$$

פרק 13.2 - פתרון מד"ר בעזרת טורים סביב נקודה סינגולרית - רגולרית

1) נתונה מד"ר מהתבנית $y''+p(x)y'+q(x)y=0$
שעבורה הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית.
הסבר כיצד פותרים את המד"ר על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב הנקודה $x=0$.
(הנח כי p,q פולינומים או מנה של פולינומים).

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראה שהנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית ופתור את המשוואה על יד פיתוח הפתרון לטור חזקות בסביבת הנקודה.

2) $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

3) $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

4) $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

5) $3x^2y''-xy'+y=0$

6) $x^2y''+xy'+x^2y=0$

7) $x^2y''-xy'+y=0$

8) $x^2y''+x(x+2)y'-2y=0$

9) $x^2y''+x(x-2)y'+2y=0$

הערה: בשאלות 2-5 הפתרונות של המשוואה האינדיציאלית שונים והפרש אינו מספר שלם.
בשאלות 6,7 הפתרונות שווים ובשאלות 8,9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות:

(2) $y = k_1 x^{1/3}\left(1-\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{728}x^4+\ldots\right)+k_2\left(1-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{440}x^4+\ldots\right)$

(3) $y = k_1 x^{1/2}\left(1-\frac{7}{18}x^1+\frac{147}{792}x^2+\ldots\right)+k_2 x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x^1+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)$

(4) $y = k_1 x^{-1}\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{90}x^3+\ldots\right)+k_2 x^{2.5}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-\frac{1}{7722}x^3+\ldots\right)$

(5) $y = k_1 x + k_2 x^{1/3}$

(6) $y = k_1\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+k_2\left[\ln x\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}x^4+\ldots\right)+\left(\frac{2}{2^3}x^2+\frac{-12}{4^3\cdot 2^3}x^4+\ldots\right)\right]$

(7) $y(x) = k_1 x + k_2 x\ln x$ (8) $y(x) = \frac{k_1}{x^2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}\right)+\frac{k_2}{x^2}e^{-x}$

(9) $y = -a_0 x^2 \ln x\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\ldots\right)+a_0 x\left(1-x^2-\frac{3}{4}x^3+\ldots\right)$